Труды

III Международного симпозиума

ИФАК

по автоматическому

управлению

в мирном использовании

космического пространства *(в двух томах)*

Франция, г. Тулуза
март 1970 г.

УПРАВЛЕНИЕ В КОСМОСЕ

ТОМ 1

ИЗДАТЕЛЬСТВО НАУКА
МОСКВА 1972

Например, для $\gamma=16$, $l=0{,}5$ и $x_0=0$ начальное значение координаты y в 0,36460 дает траекторию, которая сходится к двухимпульсному предельному циклу, в то время как при начальном значении координаты y в 0,36458 приводит к возникновению четырехимпульсного предельного цикла.

Незаштрихованные области, обозначенные как «четыре импульса» и «шесть импульсов» на рис. 7, грубо отображают поведение системы, наблюдавшееся экспериментально для начальных точек, лежащих в этих областях. Аналитические результаты, о которых здесь сообщалось, предполагают только, что точки, лежащие за заштрихованной областью, соответствуют недвухимпульсным предельным циклам, и, конечно, точки, лежащие внутри области, соответствуют двухимпульсным предельным циклам. Из-за симметрии системы поведение системы, отображенное на рис. 7, также справедливо и для $0>y_0>-1$.

Обозначения:

a — коэффициент усиления по скорости, A — номинальное пороговое значение, B_i — граница на фазовой плоскости $i=1, 2, 3, 4, 5$, l — входной сигнал на модулятор, l_0— выходной сигнал интегратора, l_s— сигнал датчика, l_N — сигнал форсирующего контура, F — переходная функция, I — момент инерции управляемого тела, K — коэффициент усиления датчика, l — нормализованный коэффициент усиления по скорости, m — момент управления, R_i— область на фазовой плоскости, S — переменные преобразования Лапласа, t — время, $t_к$ — момент зажигания, U — единичный импульс, x — нормализованное положение, $x_к$ — нормализованное положение в момент зажигания, y — нормализованная скорость, $y_к$ — нормализованные скорости в момент $t_к^+$, z — нормализованный вектор состояния, $z_к$ — нормализованный вектор состояния в $t_к^+$, $\delta_к$ — знак управляющего импульсного момента в момент $t_к^+$, γ — ошибка в установке порогового значения, θ — положение, $\dot\theta$ — скорость, $\theta_к$— положение в момент $t_к$, $\dot\theta_к$— скорость в момент $t_к^+$, θ_d — половина ширины допустимой зоны не чувствительности, μ — величина импульсного момента управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. J. Abzug*. Active Satellite attitude control. — In: Guidance and control of Aerospace vehicles, char. 8. McGraw-Hill, 1963.
2. *B. Lange*. The drag-free Satellite. — AIAA J., 1964, v. 2, No 9.
3. *J. LaSalle, S. Lefchetz*. Stability by Liapuno's direct method with applications. N. Y., Acad. Press, 1961.
4. *F. R. Alex*. A study of Russian freedback control theory. — WADD Techn. Rept., No 61-32, 1961.
5. *R. W. Jones, C. C. Li*. Integral Pulse Frequency Modulated Control Systems — Proc. Second IFAC Congr, London, 1963.
6. *I. Flugge-Lotz*. Discontinuous and optimal control. McGraw-Hill, 1958.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКОВ

В. В. РУМЯНЦЕВ

(СССР)

Рассмотрим движение в центральном ньютоновском поле сил спутника-гиростата, представляющего собой свободное твердое тело, с которым неизменно связаны оси вращений симметричных статически и динамически уравновешенных твердых тел — роторов.

Примем центр O_1 поля сил ньютоновского притяжения за начало инерциальной системы осей координат $O_1\,\xi\eta\zeta$, центр масс O спутника-гиростата — за начало подвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$, оси которой совпадают с главными центральными осями инерции спутника. Удобно ввести в рассмотрение еще одну подвижную систему осей координат $Oxyz$, ось z которой направлена по прямой O_1O, ось x — по прямой, ортогональной оси z и направленной параллельно плоскости $O_1\xi\zeta$ в сторону движения центра масс, ось y — по прямой, ортогональной двум другим и ориентированной так, чтобы система $Oxyz$ была одноименной с двумя другими.

Положение гиростата в системе координат $O_1\xi\eta\zeta$ будем определять сферическими координатами ρ, $\varkappa$, σ центра масс O и углами Эйлера θ, ψ, φ, определяющими положение корпуса спутника в системе координат $Oxyz$, причем ось z примем за ось прецессии, а ось x_3— за ось собственного вращения корпуса. Углы поворота роторов относительно корпуса спутника обозначим через α_s. Эти переменные будут представлять собой лагранжевы координаты q_i системы, число которых $n=6+m$, где m — число роторов, причем $q_1=\rho$, $q_2=\varkappa$, $q_3=\sigma$, $q_4=\theta$, $q_5=\psi$, $q_6=\varphi$, $q_{6+s}=\alpha_s(s=1,\ldots, m)$.

Уравнения движения гиростата запишем в форме уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i \quad (i=1,\ldots, n), \tag{1}$$

где функция Лагранжа

$$L=T+U={}^1\!/_2 M\,(\dot{\rho}^2+\rho^2\cos^2\varkappa\dot{\sigma}^2+\rho^2\dot{\varkappa}^2)+{}^1\!/_2\sum_{j=1}^{3}A_j\omega_j^2+$$

$$+\,\omega\cdot\sum_{s=1}^{m}J_s\dot{\alpha}_s l_s+1/2\sum_{s=1}^{m}J_s\dot{\alpha}_s^2+\mu\,\frac{M}{\rho}-\mu/2\rho^3\sum_{j=1}^{3}A_j(3\gamma_j^2-1). \tag{2}$$

Здесь T и U обозначают кинетическую энергию и силовую функцию гравитационных сил, M, A_j, J_s, l_s— массу, главные центральные моменты инерции гиростата, осевые моменты инерции и единичные векторы направлений осей роторов соответственно, ω_i— проекции на оси x_i вектора ω мгновенной абсолютной угловой скорости вращения корпуса гиростата, зависящие [1] от q_2, q_i, $\dot{q}_k(i=4, 5, 6, к=2,\ldots, 6)$; γ_i— косинусы углов, образуемых осью z с осями x_i, зависящие от q_i; μ — гравитационную постоянную притягивающего центра, θ_i— обобщенные негравитационные силы, причем далее будем считать все $\theta_r=0$ $(r=1,\ldots,6)$. Отметим, что потенциальная энергия гравитационных сил в выражении (2) записана с точностью до членов порядка $(l/\rho)^2$, где l — характерный размер спутника.

Как видно из выражения (2), движение центра масс гиростата связано с его движением вокруг центра масс. Однако влияние последнего на движение центра масс для небольших спутников мало, поэтому в первом приближении им часто пренебрегают, рассматривая задачу в так называемой ограниченной постановке, т. е. предполагая, что центр масс движется по известной кеплеровой орбите.

Движение роторов влияет на движение корпуса гиростата посредством гиростатического момента

$$k=\sum_{s=1}^{m}J_s\dot{\alpha}_s\mathbf{l}_s, \tag{3}$$

равного геометрической сумме векторов моментов количеств относительных движений роторов.

Уравнения (1) для роторов имеют вид

$$\frac{d}{dt} J_s = (\dot{\alpha}_s + \omega \cdot l_s) = \theta_{6+s} \; (s = 1, \ldots, m), \tag{4}$$

где обобщенные силы θ_{6+s} представляют собой моменты относительно осей $\mathbf{l}_s$, приложенных к роторам.

В дальнейшем будем рассматривать следующие три случая задания моментов сил, приложенных к роторам:

— моменты θ_{6+s} $(s=1,\ldots, m)$ обеспечивают постоянство во все время движения относительных угловых скоростей роторов

$$\dot{\alpha}_s = \dot{\alpha}_{s0} = \mathrm{const}, \tag{5}$$

— моменты сил $\theta_{6+s}=0$, т. е. роторы, вращаются свободно, по инерции, а из уравнений (4) следуют первые интегралы

$$\partial L/\partial \dot{\alpha}_s = J_s (\dot{\alpha}_s + \omega \cdot \mathbf{l}_s) = \dot{N}_s = \mathrm{const} \quad (s = 1, \ldots, m), \tag{6}$$

выражающие постоянство проекций абсолютных угловых скоростей роторов на их оси;

— моменты θ_{6+s} являются непрерывными, произвольно заданными функциями времени.

Во всех этих случаях уравнения (1) имеют первый интеграл

$$\partial L/\partial \dot{\sigma} = K = \mathrm{const}, \tag{7}$$

отвечающий циклической координате σ. Если центральный эллипсоид инерции гиростата есть эллипсоид вращения вокруг оси x_3, т. е. $A_1=A_2$, и гиростатический момент k коллинеарен этой оси, уравнения (1) допускают также первый интеграл

$$\partial L/\partial \dot{\varphi} = A_3\omega_3 + k_3 = G = \mathrm{const}, \tag{8}$$

выражающий постоянство проекции на ось x_3 кинетического момента гиростата [1].

Рассмотрим сначала ограниченную задачу, предполагая, что центр масс O гиростата описывает в плоскости $O_1\xi\zeta$ кеплерову круговую орбиту произвольного радиуса ρ_0 с центром в притягивающей точке O_1 с постоянной угловой скоростью $\dot{\sigma}=\omega_0$, причем

$$\omega_0^2 = \mu/\rho_0^3. \tag{9}$$

Орбитальная система координат $Oxyz$ при этом равномерно вращается вокруг оси η с угловой скоростью ω_0.

В этой постановке естественно рассмотреть задачу о состояниях относительного равновесия или стационарного движения корпуса гиростата в орбитальной системе координат и их устойчивости.

Уравнениями относительного движения гиростата будут уравнения (1) для переменных $(q_i i=4, 5, 6)$ и α_s с функцией Лагранжа (2), в которой слагаемые с множителем M следует считать постоянными с учетом равенства (9).

Начнем с разыскания положений относительного равновесия корпуса гиростата для случая, когда выполняются условия (5) для всех роторов. Так как величины $\dot{\alpha}_{s0}$ при этом играют роль постоянных параметров в функции Лагранжа, получаемой из (2) отбрасыванием аддитивных постоянных, то последняя имеет структуру

$$L=L_2+L_1+L_0,$$

где L_2— однородные функции степени s от переменных $\dot{q}_i(i=4, 5, 6)$. Вследствие того, что функция L не зависит явно от времени, уравнения относительного движения гиростата допускают обобщенный интеграл энергии

$$L_2 - L_0 = \text{const},$$

причем потенциальная энергия гравитационных и центробежных сил

$$W(\beta_i, \gamma_i) = -L_0 = \omega_0 \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{1}{2}\omega_0 A_i (3\gamma_i^2 - \beta_i^2) - k_i \beta_i\right]. \tag{11}$$

Здесь β_i и k_i означают проекции на оси x_i единичного вектора **j** направления оси y, нормальной к плоскости орбиты, и вектора k гиростатического момента.

По принципу возможных перемещений для относительного равновесия гиростата на круговой орбите необходимо и достаточно выполнение условия

$$\delta W = 0, \tag{12}$$

т. е. разыскание положений относительного равновесия приводится к нахождению стационарных значений потенциальной энергии $W(\beta_i, \gamma_i)$.

В [1] указаны некоторые из решений уравнения (12). Важно выбрать переменные, по отношению к которым должны быть найдены стационарные значения функции W. Переменные β_i и γ_i не являются независимыми, они связаны тремя очевидными соотношениями

$$f_1(\beta_i) = {}^1/_2 \left(\sum_{j=1}^{3} \beta_j^2 - 1\right) = 0, \quad f_2(\gamma_i) = {}^1/_2 \left(\sum_{j=1}^{3} \gamma_j^2 - 1\right) = 0,$$

$$f_3(\beta_i, \gamma_i) = \sum_{j=1}^{3} \beta_j \gamma_j = 0. \tag{13}$$

Вводя множители Лагранжа $\lambda_i (i=1, 2, 3)$, задача (12) сводится к задаче о безусловном экстремуме функции

$$W_1(\beta_i, \gamma_i, \lambda_i) = W + \sum_{i=1}^{3} \gamma_i f_i,$$

которая в свою очередь сводится к системе девяти уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial W_1}{\partial \beta_i} = (\lambda_1 - A_i \omega_0^2)\beta_i - \omega_0 k_i + \lambda_3 \gamma_i = 0, \\ &\frac{\partial W_1}{\partial \gamma_1} = (3A_i \omega_0^2 + \lambda_2)\gamma_i + \lambda_3 \beta_i = 0, \quad \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_i} = f_i = 0, \quad (i = 1,2,3) \end{aligned} \tag{14}$$

с таким же числом неизвестных β_i, γ_i, $\lambda_i (i=1, 2, 3)$. Величины A_i, $k_i (i=1,2,3)$ и ω_0 играют роль параметров. Далее будем считать моменты инерции A_i и угловую скорость ω_0 центра масс фиксированными и будем интересоваться лишь влиянием гиростатического момента. Заметим, что первые шесть уравнений (14) линейны и довольно просты по структуре, а остальные совпадают с уравнениями (13). Можно искать решения этих уравнений при заданных k_i. Однако практически интереснее задаться определенными значениями γ_i, т. е. заранее задать выбранное направление в корпусе гиростата, которым он должен быть обращен на притягивающий центр, и искать соответствующие значения β_i, k_i, при которых возможно реализовать относительно равновесие спутника с заданным направлением на точку O_1. Действительно, задаваясь произвольными значениями $\gamma_i = \gamma_{i0}$, удовлетворяющими второму из уравнений (13), и $\lambda_1 = \lambda_{10}$ и разрешая систему

(14) относительно β_i, k_i, λ_2, λ_3, нетрудно получить значения этих величин в относительном равновесии [2]

$$\lambda_2 = \lambda_{20} = -3\omega_0^2 \sum_{i=1}^{3} A_i \gamma_{i0}^2,$$

$$\lambda_3 = \lambda_{30} = \pm 3\omega_0^2 \left[\sum_{i=1}^{3} A_i \gamma_{i0}^2 - \left(\sum_{i=1}^{3} A_i \gamma_{i0}^2 \right)^2 \right]^{1/2}, \tag{15}$$

$$\beta_i = \beta_{i0} = \frac{3\omega_0^2}{\lambda_{30}} \left(\sum_{j=1}^{3} A_j \gamma_{j0}^2 = A_i \right) \gamma_{i0},$$

$$k_i = k_{i0} = 1/\omega_0 \left[\left(\lambda_{10} - A_i \omega_0^2 \right) \beta_{i0} + \lambda_{30} \gamma_{i0} \right]$$

в случае $\lambda_{30} \neq 0$. Если же

$$\lambda_{30} = \pm 3\omega_0^2 \left[\sum_{1,2,3} (A_2 - A_3)^2 \gamma_{20}^2 \gamma_{30}^2 \right]^{1/2} = 0,$$

что возможно лишь когда в положении относительного равновесия одна из главных центральных осей инерции гиростата направлена коллинеарно оси z, то β_{i0} могут иметь любые значения, удовлетворяющие первому и третьему из уравнений (13), а остальные неизвестные определяются равенствами (15). Решения уравнений (14) можно подразделить на три класса [3,4].

I класс. Главные центральные оси инерции гиростата коллинеарны осям орбитальной системы координат, т. е. одна из величин γ_{i0} и одна из величин β_{i0} равны единице, а остальные — нулю. Эти решения возможны, если произвольный по величине гиростатический момент коллинеарен нормали к плоскости орбиты.

II класс. Одна из главных осей инерции гиростата коллинеарна осям x или z орбитальной системы, а две другие повернуты относительно орбитальных осей на произвольный угол θ_0, в зависимости от которого определяется гиростатический момент. Так, например, если $\gamma_{10} = \gamma_{20} = \beta_{30} = 0$, $\gamma_{30} = 1$, $\beta_{10} = \sin\theta_0$, $\beta_{20} = \cos\theta_0$, то должны выполняться условия

$$\omega_0 (A_2 - A_1) \sin 2\theta_0 = 2 (k_{10} \cos \theta_0 - k_{20} \sin \theta_0), \qquad k_{30} = 0, \tag{16}$$

или, если $\gamma_{10} = \beta_{10} = 0$, $\beta_{30} = -\gamma_{20} = \sin\theta_0$, $\beta_{20} = \gamma_{30} = \cos\theta_0$, то условия

$$2\omega_0 (A_2 - A_3) \sin 2\theta_0 = k_{30} \cos \theta_0 - k_{20} \sin \theta_0, \qquad k_{10} = 0. \tag{17}$$

Заметим, что для спутника с осесимметричным эллипсоидом инерции возможны решения только этих двух классов.

III класс. Ни одна из главных осей инерции не коллинеарна осям орбитальной системы координат, т. е. ни одна из величин β_{i0} и γ_{i0} не равна единице. При этом каждому возможному набору значений γ_{i0} отвечают два динамически эквивалентных положения равновесия, отличающиеся одно от другого поворотом на угол π вокруг оси z [2].

Для спутника, представляющего собой одно твердое тело (без роторов) с трехосным эллипсоидом инерции, возможны, как известно, лишь решения I класса. Таким образом, наличие на спутнике ротора позволяет существенно расширить класс решений уравнений относительного равновесия и ориентировать спутник любой точкой его поверхности на притягивающий центр.

Вместе с тем отметим, что не любая ориентация спутника в орбитальной системе достижима за счет ротора. Так, например, среди решений уравнений (14) нет положений относительного равновесия, при которых одна из главных осей инерции гиростата коллинеарна нормали к плоскости орбиты, а две другие повернуты относительно орбитальных осей.

Рассмотрим теперь случай свободно вращающихся роторов, когда существуют интегралы (6). Игнорируя по методу Рауса циклические координаты α_s, построим для ограниченной задачи функцию Рауса

$$R = L - \sum_{s=1}^{m} \dot{\alpha}_s N_s = {}^1/_2 \sum_{i=1}^{3} A_i \omega_i^2 + \omega \cdot \sum_{s=1}^{m} N_s \mathbf{l}_s - {}^1/_2 \sum_{s=1}^{m} J_s (\omega \cdot \mathbf{l}_s)^2 -$$
$$- {}^3/_2\, \omega_0^2 \sum_{i=1}^{3} A_i \left(\gamma_i^2 - \frac{1}{3}\right) - {}^1/_2 \sum_{s} \frac{N_s^2}{J_s}. \tag{18}$$

Уравнения в форме Рауса допускают обобщенный интеграл энергии $R_2 - R_0 = \mathrm{const}$. Измененная потенциальная энергия приведенной системы равна

$$W^*(\beta_i, \gamma_i) = -R_0 = \omega_0 \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{\omega_0}{2} A_i (3\gamma_i^2 - \beta_i^2) - k_i^* \beta_i\right] +$$
$$+ {}^1/_2\, \omega_0^2 \sum_{s=1}^{m} J_s (\mathbf{j} \cdot \mathbf{l}_s)^2, \tag{19}$$

где k_i^* обозначают проекции на оси x_i гиростатического момента

$$\mathbf{k}^* = \sum_{s=1}^{m} N_s \mathbf{l}_s. \tag{20}$$

Положения относительного равновесия гиростата в этом случае определяются из условия [5]

$$\delta W^* = 0. \tag{21}$$

Так как для относительного равновесия корпуса гиростата и равномерного вращения роторов, когда $\dot{q}_i = 0$ $(i=4, 5, 6)$ и $\dot{\alpha}_s = \dot{\alpha}_{s0}$, между векторами гиростатических моментов (4) и (20) имеет место соотношение

$$\mathbf{k}^* = \mathbf{k} + \omega_0 \sum_{s=1}^{m} J_s (\mathbf{j} \cdot \mathbf{l}_s)\, \mathbf{l}_s, \tag{22}$$

то, как легко видеть, условие (21) совпадает с условием (12). Отсюда следует, что положения относительного равновесия гиростата в случаях (5) и (6) при условии (22) совпадают [1].

Рассмотрим, наконец, в ограниченной постановке задачи стационарные движения гиростата по отношению к орбитальной системе координат. Будем предполагать, что центральный эллипсоид инерции гиростата является эллипсоидом вращения вокруг оси x_3, коллинеарно которой направлен гиростатический момент (4), так что $A_1 = A_2$, $k_1 = k_2 = 0$. Момент сил θ_{s+6} будем предполагать произвольной непрерывной функцией, которая, в частности, может соответствовать случаям (5) или (6). Пренебрегая циклической координатой φ, получим функцию Рауса

$$R = {}^1/_2\, A_1 [\dot{\psi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2 + 2\omega_0 (\dot{\Psi} \sin\theta \cos\theta \cos\Psi + \dot{\theta} \sin\Psi)] +$$
$$+ G\dot{\psi} \cos\theta - V(\theta, \psi),$$

где измененная потенциальная энергия

$$V(\theta, \Psi) = \omega_0 [{}^3/_2\, \omega_0 (A_3 - A_1) \cos^2\theta + {}^1/_2 A_1 \omega_0 \sin^2\theta \cos^2\psi +$$
$$+ G \sin\theta \cos\psi].$$

Функция R совпадает с функцией Рауса для одного симметричного твердого тела, вследствие чего задача о движении приведенной системы для динамически симметричного гиростата эквивалентна аналогичной задаче для динамически симметричного твердого тела [1].

Перейдем теперь к рассмотрению задачи в полной постановке с учетом взаимного влияния движений центра масс и вокруг центра масс. Игнорируя циклическую координату σ, которой отвечает первый интеграл (7), построением функции Рауса найдем измененную потенциальную энергию для случая (5) вида

$$\widetilde{W}(\rho,\ \varkappa,\ \beta_i,\ \gamma_i) = \frac{1}{2S}\left(K - \sum_{i=1}^{3} k_i\beta_i\right)^2 - \mu\frac{M}{\rho} + {}^3/_2\ \frac{\mu}{\rho^3}\sum_{i=1}^{3} A_i\left(\gamma_i^2 - \frac{1}{3}\right), \quad (23)$$

где момент инерции гиростата относительно оси $O_1\eta$

$$S = M\rho^2\cos^2\varkappa + \sum_{i=1}^{3} A_i\beta_i^2,$$

а β_i обозначают косинусы углов, образуемых осями x_i с осью η. Переменные β_i и γ_i связаны тремя соотношениями

$$f_1(\beta_i) = {}^1/_2\ \left(\sum_{j=1}^{3} \beta_j^2 - 1\right) = 0, \qquad f_2(\gamma_i) = {}^1/_2\ \left(\sum_{j=1}^{3} \gamma_j^2 - 1\right) = 0,$$

$$f_3(\beta_i,\ \gamma_i,\ \varkappa) = \sum_{j=1}^{3} \beta_j\gamma_j - \sin\varkappa = 0. \quad (24)$$

Строя функцию

$$\widetilde{W}_1(\rho,\ \varkappa,\ \beta_i,\ \gamma_i,\ \lambda_i) = \widetilde{W} + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i f_i,$$

уравнения стационарных движений гиростата можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\widetilde{W}_1}{\partial\rho} = -M\,\Omega^2\rho\cos^2\varkappa + \mu\frac{M}{\rho} - \frac{9}{2}\ \frac{\mu}{\rho^4}\ \sum_{i=1}^{3} A_i\left(\gamma_i^2 - \frac{1}{3}\right) = 0,\\
&\frac{\partial\widetilde{W}_1}{\partial\varkappa} = (M\Omega^2\rho^2\sin\varkappa - \lambda_3)\cos\varkappa = 0,\\
&\frac{\partial\widetilde{W}_1}{\partial\beta_i} = (\lambda_1 - A_i\,\Omega^2)\,\beta_i - \Omega\,k_i + \lambda_3\gamma_i = 0,\\
&\frac{\partial\widetilde{W}_1}{\partial\gamma_i} = (3A_i\omega_0^2 + \lambda_2)\,\gamma_i + \lambda_3\beta_i = 0, \quad \frac{\partial\widetilde{W}_1}{\partial\lambda_i} = f_i = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3),
\end{aligned} \quad (25)$$

где ω_0 определена равенством (9), а $\Omega = 1/S_0\ \left(\mathbf{k} - \sum_{i=1}^{3} k_i\beta_i\right)$ обозначает постоянную угловую скорость центра масс спутника в стационарном движении при постоянных значениях

$$\rho = \rho_0, \quad \varkappa = \varkappa_0, \quad \beta_i = \beta_{i0}, \quad \gamma_i = \gamma_{i0}, \quad \lambda_i = \lambda_{i0} \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \quad (26)$$

определяемых уравнениями (25). При заданных значениях λ_{10} и γ_{i0}, удовлетворяющих второму уравнению (24), находим связь между постоянными ρ_0 и Ω

$$\Omega^2\cos^2\varkappa_0 = \omega_0^2 - \frac{9}{2}\ \frac{\mu}{M\rho_0^s}\ \sum_{i=1}^{3} A_i\left(\gamma_{i0}^2 - \frac{1}{3}\right). \quad (27)$$

Множители Лагранжа, угол $\varkappa_0$ и проекции гиростатического момента будут следующими:

$$\lambda_{20} = -3\omega_0^2 \sum_{i=1}^{3} A_i \gamma_{i0}^2 - \lambda_{30} \sin \varkappa_0, \qquad \sin \varkappa_0 = \frac{\lambda_{30}}{M\Omega^2 \rho_0^2},$$

$$\lambda_{30} = \pm \frac{3\omega_0^2}{\cos \varkappa_0} \left[\sum_{i=1}^{3} A_i \gamma_{i0}^2 - \left(\sum_{i=1}^{3} A_i \gamma_{i0}^2 \right)^2 \right]^{1/2}, \tag{28}$$

$$K_{i0} = \frac{1}{\Omega} [\lambda_{30}\gamma_{i0} + (\lambda_{10} - A_i \Omega^2) \beta_{i0}],$$

причем при

$$\lambda_{30} \neq 0, \qquad \beta_{i0} = -\frac{1}{\lambda_{30}} | 3A_i\omega_0^2 + \lambda_{20} | \gamma_{i0}, \tag{29}$$

а при $\lambda_{30}=0$ постоянные β_{i0} определяются из уравнений (24).

Как следует из уравнения (27), отношение квадрата истинной угловой скорости центра масс к квадрату кеплеровой угловой скорости отличается от единицы на очень малую величину порядка $(l/\rho_0)^2$. В случае $\lambda_{30} \neq 0$ угол $\varkappa_0$, образуемый радиус-вектором центра масс с плоскостью $O_1\xi\zeta$, отличен от нуля, но очень мал, порядка величины $(l/\rho_0)^2$; если же $\lambda_{30}=0$, то и $\varkappa_0=0$. На такие же величины порядка $(l/\rho_0)^2$ отличаются значения λ_{20}, λ_{30}, β_{i0}, k_{i0} от соответствующих значений (15) в ограниченной задаче. Следовательно, стационарные движения (26) гиростата весьма мало отличаются от его относительных равновесий в ограниченной задаче. В случае, когда $\lambda_{30}=0$, отличие состоит лишь в величине угловой скорости центра масс, но ориентация корпуса гиростата в орбитальной системе такова же, как в соответствующих решениях классов I и II ограниченной задачи, т. е. главные оси инерции спутника или коллинеарны осям орбитальной системы, или же одна из главных осей спутника коллинеарна оси z, а две другие оси повернуты относительно орбитальных осей. Заметим, что стационарные движения, в которых спутник повернут вокруг касательной к орбите, а притягивающий центр находится в плоскости орбиты, возможны только для осесимметричного спутника [1] (например, движение у которого $\varkappa_0=0$, $\beta_{10}=\gamma_{10}=0$, $\beta_{30}=-\gamma_{20}=\sin\theta_0$, $\beta_{20}=\gamma_{30}=\cos\theta_0$) возможно лишь при условии $A_2=A_3$. В случаях, когда $\lambda_{30}\neq 0$, плоскость орбиты смещена относительно притягивающего центра на малую величину $\rho_0 \sin\varkappa_0$, имеющую порядок величины l^2/ρ_0. Возможность смещения плоскости орбиты от притягивающего центра была установлена независимо Р. Е. Роберсоном [7] и С. Я. Степановым [2], последний [2] нашел всевозможные решения такого типа.

В случае (6) свободно вращающихся роторов уравнения стационарных движений гиростата совпадают с уравнениями (25) для случая (5), если постоянная K интеграла площадей (7) в обоих случаях имеет одно и то же значение, а гиростатические моменты $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}^*$ связаны соотношением (22) [5].

Перейдем к исследованию устойчивости относительных равновесий гиростата в ограниченной постановке для случая (5). На основании теоремы Лагранжа достаточными условиями устойчивости будут условия минимума функции W, которые получим как условия определенной положительности второй вариации функции W. Эти условия имеют следующий вид [1]:

Для решений I класса в случае $\beta_{10}=\beta_{30}=\gamma_{10}=\gamma_{20}=0$, $\beta_{20}=\gamma_{30}=1$

$$A_2 + \frac{k_2}{\omega_0} > A_1 > A_3, \quad A_2 + \frac{k_2}{4\omega_0} > A_3. \tag{30}$$

Для решений II класса в случае $\beta_{10}=\sin\theta_0$, $\beta_{20}=\cos\theta_0$,

$\beta_{30}=\gamma_{10}=\gamma_{20}=0$, $\gamma_{30}=1$

$$A_2+\frac{k_2}{\omega_0\cos^3\theta_0}>A_1,\quad A_2+\frac{k_2\cos\theta_0}{\omega_0(3+\cos^2\theta_0)}>A_3,$$

$$3(N_1-A_3)(A_2-A_3)+\left(A_2-A_3+\frac{k_2}{\omega_0\cos\theta_0}\right)(A_1\cos^2\theta_0+ \tag{31}$$

$$+A_2\sin^2\theta_0-A_3)>0,$$

а в случае $\beta_{10}=\gamma_{10}=0,\ \beta_{20}=\gamma_{30}=\cos\theta_0,\ \beta_{30}=-\gamma_{20}=\sin\theta_0$

$$A_2+\frac{k_2}{4\omega_0\cos^3\theta_0}>A_3,\qquad A_1-A_2\sin^2\theta_0-A_3\cos^2\theta_0>0,$$

$$3(A_1-A_2)(A_2-A_3)\sin^2\theta_0+\left(A_2-A_1+\frac{k_2}{\omega_0\cos\theta_0}\right)(A_1-A_2\times \tag{32}$$

$$\times\sin^2\theta_0-A_3\cos^2\theta_0)>0.$$

Для решений III класса [2]

$$a>0,\quad \lambda_{10}>\lambda,(2a\lambda=b+\sqrt{b^2-4ac}), \tag{33}$$

где a, b, c определены равенствами (2. 5) в работе [2]. Заметим, что условия (31) и (32) значительно упрощаются для динамически симметричного спутника-гиростата, когда $A_2=A_3$, принимая соответственно вид неравенств

$$A_2+\frac{k_2}{\omega_0\cos^3\theta_0}>A_1>A_2,\qquad A_2+\frac{k_2}{\omega_0\cos\theta_0}>A_1>A_2.$$

Неравенства (30)—(33) представляют собой также необходимые и достаточные условия вековой устойчивости; при нарушении этих условий (замена знака хотя бы одного из неравенств на противоположный) относительное равновесие будет неустойчиво в вековом смысле.

Нужную для стабилизации положений относительного равновесия до асимптотической устойчивости диссипацию энергии можно вводить в систему многими способами.

Простейший из них состоит в использовании вязкой жидкости, целиком заполняющей некоторую полость в корпусе спутника. Изложенные выше результаты остаются справедливыми и при наличии жидкости в полостях [1], за исключением лишь результатов, полученных с использованием интеграла (8), который не существует, если жидкость обладает вязкостью.

При изменении знаков на обратные в некоторых из неравенств (30)—(33), если степень неустойчивости становится при этом нечетной, соответствующие относительные равновесия гиростата будут неустойчивыми. Так, например, рассматриваемое решение класса I будет неустойчивым при выполнении одной из четырех групп неравенств

$$\begin{aligned}&A_2+k_2/4\omega_0>A_3>A_1,\quad A_2+k_2/\omega_0>A_1,\quad A_3>A_1>A_2+k_2/\omega_0,\\&A_3>A_2+k_2/\omega_0,\\&A_1>A_2+k_2/\omega_0,\quad A_1>A_3,\quad A_2+k_2/4\omega_0>A_3,\\&A_2+k_2/\omega_0>A_1>A_3>A_2+k_2/4\omega_0.\end{aligned} \tag{34}$$

Достаточное условие устойчивости относительного равновесия одного твердого тела

$$A_2>A_1>A_3 \tag{35}$$

получаем из (30) при $k_2=0$. Сравнивая условия (35) с условиями (30) и (34), приходим к выводу, что вращающиеся роторы могут давать как стабилизирующий, так и дестабилизирующий эффекты.

Можно показать [2], принимая $A_1\geqslant A_2\geqslant A_3$, что большие круги

$$\sqrt{A_2-A_3}\,\gamma_3\pm\sqrt{A_1-A_2}\,\gamma_1=0$$

делят сферу $\sum_{i=1}^{3}\gamma_i^2=1$ на четыре области; в областях, содержащих точки $\gamma_3=\pm1$, величина $a>0$, а в областях, содержащих точки $\gamma_1=\pm1$, $a<0$, за исключением точек $\gamma_3=\pm1$ и $\gamma_1=\pm1$, в которых $a=0$. При $A_1=A_2$ эти круги совпадают с кругом $\gamma_3=0$, и на всей сфере, кроме этого круга и точек $\gamma_0=\pm1$, $a>0$. При $A_2=A_3$ круги совпадают с кругом $\gamma_1=0$ и на всей сфере, кроме этого круга и точек $\gamma_1=\pm1$, $a<0$. В областях, где $a>0$, положения равновесия устойчивы при $\lambda_{10}>\lambda$ и неустойчивы в вековом смысле при $\lambda_{10}<\lambda$, как и в областях, где $a<0$, при любом λ_{10}. Равновесие просто неустойчиво при $\lambda_{10}>\lambda$ и при $\lambda_{10}<\nu$ в областях, где $a<0$, и при $\lambda>\lambda_{10}>\nu=\frac{1}{2a}(b-\sqrt{b^2-4bc})$ в областях, где $a>0$.

Остановимся кратко на случае, когда существуют интегралы (6). Ранее было показано, что если для некоторого положения равновесия гиростата функция $W(\beta_i, \gamma_i)$ имеет минимум, то для этого же положения равновесия функция $W^*(\beta_i\gamma_i)$ также имеет минимум [5]. Из теорем Лагранжа и Рауса заключаем, что условия устойчивости положений относительно равновесия гиростата в случае (6) будут несколько шире условий устойчивости в случае (5). Это обстоятельство интересно для приложений, тем более что условия (6) осуществить практически проще, чем условия (5).

Не приводя условий устойчивости для всевозможных положений равновесия [5, 2], рассмотрим лишь условия устойчивости гиростата с одним ротором для решений I класса, когда главные оси инерции коллинеарны осям орбитальной системы, причем в положении равновесия ротор не вращается, т. е. $\dot{\alpha}_0=0$, а ось его имеет произвольное направление в корпусе гиростата; при этом постоянная интеграла (6) $N=J\omega_0 l_2$. Достаточными условиями устойчивости являются неравенства

$$A_2+Jl_1^2>A_1>A_3,\ 4(A_2-A_3)(A_2+Jl_1^2-A_1)>J(A_1-A_2)l_3^2. \tag{36}$$

Очевидно, условия (36) устойчивости относительного равновесия тела с ротором, не вращающимся в положении равновесия относительно корпуса, несколько шире условий (35) устойчивости для одного твердого тела с таким же распределением масс. Например, если ось ротора коллинеарна оси x_1 ($l_1=1$, $l_2=l_3=0$), условия (36) сводятся к неравенствам

$$A_2>A_1-J,\ A_1>A_3,\ A_2>A_3,$$

которые могут выполняться и в случае $A_2<A_1$, когда в положении равновесия средняя ось эллипсоида инерции гиростата направлена по нормали к плоскости орбиты. Если же ось ротора коллинеарна оси x_2 ($l_1=l_3=0$, $l_2=1$) или оси x_3 ($l_1=l_2=0$, $l_3=1$), то условия (36) сводятся к неравенствам (35).

Если рассмотреть условия устойчивости стационарных движений для полной постановки задачи, то можно показать [1, 2], что они отличаются от соответствующих условий устойчивости в ограниченной постановке на очень малые дополнительные слагаемые порядка $(l/\rho_0)^2$.

Таким образом, учет возмущений орбиты почти не влияет на относительные равновесия и стационарные движения и условия их устойчивости, полученные в ограниченной задаче, для реальных искусственных спутников-гиростатов, характерный размер которых много меньше расстояния до притягивающего центра. Наличие на спутнике роторов существенно расширяет класс движений и позволяет в широких пределах осуществлять управление, ориентацию и стабилизацию космического корабля.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Румянцев.* Об устойчивости стационарных движений спутников. ВЦ АН СССР. М., 1967.
2. *С. Я. Степанов.* О множестве стационарных движений спутника-гиростата в центральном ньютоновском поле сил и их устойчивости. — ПММ, 1969, т. 33, вып. 4.
3. *А. А. Анчев.* О стабилизации относительного равновесия спутника с маховиками. — Космические исследования, 1966, т. IV, вып. 2.
4. *В. М. Морозов.* Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного, магнитного и аэродинамического моментов. — Космические исследования, 1969, т. VII, вып. 3.
5. *В. В. Румянцев.* Об устойчивости относительных равновесия и стационарных движений спутника-гиростата. Инженерный журнал. — Механика твердого тела, 1968, № 4.
6. *Н. Н. Колесников.* Об устойчивости свободного гиростата. — Вестник МГУ, 1966, № 3.
7. *R. E. Roberson.* Circular orbits of non-infinitesimal material bodies in inverse square fields. — J. Astronautical Sci., 1968, v. 15, No 2.
8. *С. Я. Степанов.* О стационарных движениях спутника-гиростата. — ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОЦЕНОК КАЛМАНА—БЬЮСИ К ЗАДАЧЕ КОРРЕКЦИИ ГИРОСТАБИЛИЗИРОВАННОЙ ПЛАТФОРМЫ

Ж. АВАНЗОЛИНИ, Ж. БЕРТОНИ
(Италия)

Две фундаментальные статьи Калмана [1, 2] о теории оптимальных оценок пробудили в последнее время интерес к этим проблемам как в теории, так и в практике прежде всего при управлении ракетами и искусственными спутниками [3—6], а также в инерциальной навигации [7—11] и астрономических наблюдениях [1].

Одной из основных проблем, возникающих в космической навигации, является стабилизация либо всего летательного аппарата, либо какой-нибудь его части (например, платформ, на которых устанавливаются датчики и измерительные приборы). Как правило, такая стабилизация должна быть очень точной, что трудно обеспечить обычным гироскопическим управлением, поэтому в этом случае необходимо использовать более сложные методы [14].

Действительно, выходной сигнал даже самого лучшего гироскопа искажается из-за ухода, который в общем случае имеет детерминированную составляющую (от которой, как правило, можно избавиться) и случайную составляющую, которую необходимо принимать соответствующим образом во внимание (иначе, интегрируясь гироскопом, эта составляющая после некоторого времени может привести к недопустимым ошибкам).

Помимо гироскопа в качестве инерциальной системы координат можно использовать звезды, в этом случае применяется следящий телескоп системы астронаведения (даже Солнце можно использовать как систему отсчета для ориентации, однако из-за движения Солнца такая система не может

---

[1] Перечисленные выше направления являются только примерами большого числа областей, в которых используется теория Калмана. Интересный обзор работ, посвященных применению этой теории в инерциальной навигации, можно найти в [13].