Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О НЕКОТОРЫХ СВЯЗЯХ С ТРЕНИЕМ

Н. Г. Четаев

(*Москва*)

Вопрос о движении механических систем, стесненных связями с трением, представляет не только практический интерес. Обычно такие системы приводятся к гладким связям путем присоединения к заданным силам сил трения; однако непосредственное применение метода Лагранжа позволяет и для таких систем установить общий принцип без явно входящих в него реакций связей.

1. Рассмотрим механическую систему из n точек с массами m_i, которые имеют координаты x_i, y_i, z_i относительно некоторых неподвижных ортогональных осей. Пусть эта система стеснена некоторыми линейными связями.

Перемещение точки m_i, возможное при наложенных связях для фиксированного момента времени t, обозначим через δx_i, δy_i, δz_i.

Из возможных перемещений выделим множество перемещений, удовлетворяющих условиям

$$x_i'\delta x_i + y_i'\delta y_i + z_i'\delta z_i = 0 \qquad (i = 1,\ldots,n) \tag{1.1}$$

где x_i', y_i', z_i' обозначают действительные скорости точки m_i в рассматриваемый момент t. Полученное множество для сокращения назовем С-перемещениями.

Представим, что на точки m_i действуют заданные силы X_i, Y_i, Z_i. Дифференциальные уравнения движения несвободной материальной системы суть

$$m_i x_i'' = X_i + R_{x_i}, \quad m_i y_i'' = Y_i + R_{y_i}, \quad m z_i'' = Z_i + R_{z_i} \qquad (i = 1,\ldots,n) \tag{1.2}$$

где R_{x_i}, R_{y_i}, R_{z_i} обозначают силы реакции наложенных на систему связей.

Наиболее распространенные связи с трением определяются аксиомой

$$\sum (R_{x_i}\delta x_i + R_{y_i}\delta y_i + R_{z_i}\delta z_i) = 0 \tag{1.3}$$

справедливой для любых С-перемещений δx_i, δy_i, δz_i.

Аксиома связей с трением (1.3) постулирует, что работа реакций, действующих на материальную систему m_i в рассматриваемый момент t, когда действительные скорости точек системы m_i суть x_i', y_i', z_i' для любых С-перемещений, равна нулю.

Если из аксиомы связей с трением (1.3) исключить, согласно дифференциальным уравнениям действительных движений (1.2), реакции R_{x_i}, R_{y_i}, R_{z_i}, то получим для действительных движений следующее соотношение:

$$\sum[(m_i x_i'' - X_i)\,\delta x_i + (m_i y_i'' - Y_i)\,\delta y_i + (m_i z_i'' - Z_i)\,\delta z_i] = 0 \qquad (1.4)$$

справедливое для любых С-перемещений δx_i, δy_i, δz_i.

Интересно отметить, что реакции связей R_{x_i}, R_{y_i}, R_{z_i} не входят в соотношение (1.4) и что оно играет роль принципа. Действительно, умножая соотношения (1.1) на неопределенные множители $-\mu_i$ и складывая с соотношением (1.4), получаем

$$\sum[(m_i x_i'' - X_i - \mu_i x_i')\,\delta x_i + (m_i y_i'' - Y_i - \mu_i y_i')\,\delta y_i + \\ + (m_i z_i'' - Z_i - \mu_i z')\,\delta z_i] = 0 \qquad (1.5)$$

Это равенство справедливо для любых возможных перемещений δx_i, δy_i, δz_i, если при отличных от нуля x_i' (или y_i', или z_i') множители μ_i были выбраны так, чтобы $\mu_i x_i'$ (или $\mu_i y_i'$, или $\mu_i z_i'$) равнялись соответствующей проекции силы трения. Но при этих условиях, последнее выражение представляет известный принцип динамики материальных систем, стесненных связями с трением.

2. Чтобы установить дифференциальные уравнения движения материальной системы, исходя из принципа (1.5), предположим, что наложенные связи выражены общими соотношениями

$$\sum (a_i^{(s)}\delta x_i + b_i^{(s)}\delta y_i + c_i^{(s)}\delta z_i) = 0 \qquad (s = 1,\ldots, m) \qquad (2.1)$$

Умножая эти уравнения связей (2.1) на неопределенные множители $-\lambda_s$, а дополнительные ограничения С-перемещений (1.1) на $-\mu_i$ и складывая с (1.4), имеем

$$\sum[(m_i x_i'' - X_i - \sum_s \lambda_s a_i^{(s)} - \mu_i x_i')\,\delta x_i + (m_i y_i'' - Y_i - \sum_s \lambda_s b_i^{(s)} - \mu_i y_i')\,\delta y_i + \\ + (m_i z_i'' + Z_i - \sum_s \lambda_s c_i^{(s)} - \mu_i x_i')\,\delta z_i] = 0 \qquad (2.2)$$

Выбирая $n+m$ множителей μ_i и λ_i так, чтобы уничтожались коэффициенты последнего выражения при $n+m$ зависимых С-перемещениях δx_i, δy_i, δz_i, получим при таком выборе μ_i и λ_i в последнем выражении лишь члены с $2n-m$ независимыми перемещениями δx_i, δy_i, δz_i; коэффициенты при независимых перемещениях должны быть нулем, следовательно,

$$\begin{aligned} m_i x_i'' &= X_i + \sum \lambda_s a_i^{(s)} + \mu_i x_i' \\ m_i y_i'' &= Y_i + \sum \lambda_s b_i^{(s)} + \mu_i y_i' \qquad (i = 1,\ldots,n) \qquad (2.3) \\ m_i z_i'' &= Z_i + \sum \lambda_s c_i^{(s)} + \mu_i z_i' \end{aligned}$$

Для определения множителей λ_s служат выражения наложенных на материальную систему связей, записанные в виде соотношений для допустимых скоростей (уточнение (2.1))

$$\sum(a_i^{(s)}x_i' + b_i^{(s)}y_i' + c_i^{(s)}z_i') + e^{(s)} = 0 \qquad (s = 1,\ldots,m) \qquad (2.4)$$

Недостающие для определения множителей μ_i соотношения должны являться либо уточнением соотношений (1.1), либо значения множителей μ_i должны быть заданы наперед, как характеристики сил трения.

3. Если геометрические связи (2.4) интегрируемы, то исключение множителей λ_i возможно провести методом, предложенным Лагранжем; для этого следует геометрические связи выразить через новые голономные переменные $q_1,\ldots, q_k$

$$x_i = x_i(q_1,\ldots, q_k, t), \quad y_i = y_i(q_1,\ldots, q_k, t), \quad z_i = z_i(q_1,\ldots, q_k, t)$$
$$(i = 1,\ldots,n; \quad k = 3n - m) \qquad (3.1)$$

Отсюда для возможных перемещений получаются соотношения

$$\delta x_i = \sum \frac{\partial x_i}{\partial q_s}\delta q_s, \qquad \delta y_i = \sum \frac{\partial y_i}{\partial q_s}\delta q_s, \qquad \delta z_i = \sum \frac{\partial z_i}{\partial q_s}\delta q_s \qquad (3.2)$$

Подставляя эти значения в (1.5), имеем, если μ_i не зависят от скоростей

$$\sum \delta q_s \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_s'} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s + \frac{\partial f}{\partial q_s'}\right] = 0 \qquad (3.3)$$

где f обозначает диссипативную функцию

$$f = -\frac{1}{2}\sum \mu_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) = f_2 + f_1 + f_0 \qquad (3.4)$$

Отсюда получаем уравнения движения в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_s'} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s - \frac{\partial f}{\partial q_s'} \qquad (s = 1,\ldots, k) \qquad (3.5)$$

в котором пока еще неопределенные множители μ_i вошли в диссипативную функцию f. При заданных значениях множителей μ_i диссипативная функция f определяется вполне, и следовательно, характеристику связей с трением возможно задавать через диссипативную функцию, если μ_i зависят только от времени и положения системы.

4. Умножим уравнения (3.5) на q_s' и сложим, будем иметь

$$\frac{d}{dt}(T_2 - T_0) = \sum Q_s q_s' - 2f_2 - f_1 \qquad (4.1)$$

Стало быть, $2f_2 + f_1$ определяет скорость диссипации механической энергии.

Обычно в связях с трением механическая энергия рассеивается в тепло; для таких связей величина $2f_2 + f_1$ будет как-то связана с теплом, возникшим от трения.

5. Для определенности следует заметить, что так называемое сухое трение, сводимое Кулоном [1] к односторонним гладким связям, не составляет содержания настоящей статьи.

В связи с теорией сухого трения можно заметить, что точка массы m, движущаяся под действием сил X, Y при односторонних связях

$$y \geqslant -a\cos\frac{x}{b} \tag{5.1}$$

где a, b суть весьма малые количества, имеет при наложении связей $(\lambda > 0)$ следующие дифференциальные уравнения движения:

$$mx'' = -\lambda\frac{a}{b}\sin\frac{x}{b} + X, \quad my'' = \lambda + Y \tag{5.2}$$

Грубое приближение $\lambda + Y = 0$ дает установленный Кулоном результат, что величина силы трения

$$\begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix}\left|-Y\frac{a}{b}\sin\frac{x}{b}\right|$$

пропорциональна Y и не зависит от скоростей x'.

Если в точном выражении λ

$$\lambda = \frac{-mY + m\frac{a}{b^2}x'^2\cos\frac{x}{b} + X\frac{a}{b}\sin\frac{x}{b}}{m + \frac{a^2}{b^2}\sin^2\frac{x}{b}}$$

сократить лишь главные члены, то соответствующее значение силы трения

$$\left|\left(-Y + \frac{a}{b^2}x'^2\cos\frac{x}{b}\right)\frac{a}{b}\sin\frac{x}{b}\right|$$

с ростом x' сначала будет увеличиваться от Кулоновского значения пока значения x, после срыва с предыдущего гребня для точки падения на второй гребень, будут лежать левее точки максимума силы трения; после этого сила трения будет уменьшаться.

ЛИТЕРАТУРА

1. Coulon. Théorie des machines simples, 1785.