ЗАМЕЧАНИЯ О КЛАССИЧЕСКОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ ТЕОРИИ *

Н. Г. Четаев

(Москва)

Требование малых отклонений теоретических и натурных значений наблюдаемых функций накладывает ряд условий на силы строгой в указанном смысле теории.

В грубых инженерных теориях стремятся к тому, чтобы по первому приближению уравнений возмущенных движений предлагаемого прибора или системы невозмущенное движение было бы асимптотически устойчивым. Тогда всякие возмущающие силы порядка малости выше первого не будут в состоянии невозмущенное движение сделать неустойчивым [1]. Но этот примитив меня сейчас мало интересует.

Реальные возмущающие силы, если они делают невозмущенное движение неустойчивым, обнаруживаются по недопустимым отклонениям теоретических и натурных значений тех наблюдаемых функций, по отношению к которым невозмущенное движение становится неустойчивым; и, следовательно, такие силы должны быть введены в теорию, если последняя строится по требованию малых отклонений теории от эксперимента. В строгой установившейся теории реальные возмущающие силы не должны делать неустойчивыми хорошо наблюдаемые невозмущенные устойчивые равновесия или движения изучаемой механической системы.

В механике мы имеем блестящую теорию голономных механических систем, находящихся под действием сил, допускающих силовую функцию.

Теория эта себя хорошо оправдала. Уравнения движения таких механических систем в канонических переменных q_s, p_s записываются в форме Гамильтона

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \qquad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

где $H(t, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ — функция Гамильтона.

Первое приближение уравнений возмущенных движений имеет вид уравнений в вариациях Пуанкаре

$$\frac{d\xi_s}{dt} = \sum \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial q_j} \xi_j + \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_j} \eta_j \right), \qquad \frac{d\eta_s}{dt} = -\sum \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial q_j} \xi_j + \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial p_j} \eta_j \right)$$

где ξ_s, η_s—соответственно отклонения координат q_s и импульсов p_s.

Устойчивость ведущего или невозмущенного движения может быть лишь тогда, когда характеристичные числа всех решений уравнений в вариациях суть нули [2].

Если невозмущенное движение устойчиво, то отвечающие уравнения в вариациях Пуанкаре являются приводимыми к системе уравнений с постоянными коэффициентами [3] и, следовательно, [4], произвольные малые возмущающие силы могут делать подобные устойчивые движения неустойчивыми. Но почему же при всем этом теория Гамильтона хорошо оправдывает себя?

* Работа обнаружена в записях Н. Г. Четаева и датирована.

Рассмотрим наиболее простой и наиболее разработанный случай, когда невозмущенное движение является равновесием механической голономной системы под действием сил, допускающих силовую функцию.

В чем состоит гарантийный силовой барьер теории, который защищает систему от больших отклонений при действии произвольных малых возмущающих сил? Вопрос этот разъяснил лорд Кельвин.

Вблизи положений равновесия существуют нормальные координаты; уравнения возмущенных движений в первом приближении имеют вблизи устойчивого положения равновесия следующий вид:

$$x_i'' = -\alpha_i x_i \qquad \text{при положительных } \alpha_i$$

Кроме общих возмущающих сил, которые предполагаются выше первого порядка малости, предполагаются линейные малые диссипативные силы с составляющими

$$X_i = -\frac{\partial f}{\partial x_s'}$$

где функция рассеяния $f = \Sigma c_{\alpha\beta} x_\alpha' x_\beta'$ представляет определенно положительную относительно скоростей x_j' квадратичную форму с постоянными коэффициентами.

Если равновесие устойчиво при потенциальных силах, то оно становится ассимптотически устойчивым при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией, а тем самым и при возмущающих силах выше первого порядка малости [5].

Все это заставляет заключить, что малые диссипативные силы с полной диссипацией, всегда реально существующие в нашей природе, являются гарантийным силовым барьером, делающим пренебрежимыми влияния нелинейных возмущающих сил.

Подобные рассуждения можно провести и для устойчивых невозмущенных движений гамильтоновых систем, так как в этом случае уравнения в вариациях Пуанкаре являются приводимыми.

Вопросы о возмущающих силах могут быть весьма разнообразны, могут отличаться от только что рассмотренных.

В работе «Об устойчивых траекториях динамики» рассматривался вопрос о возмущающих потенциальных силах таких, чтобы одно определенное условие устойчивости невозмущенного движения механической системы, находящейся под действием заданных и возмущающих потенциальных сил, не зависело бы явно от потенциала возмущающих сил, а зависело бы от силовой функции заданных сил и от имеющей самостоятельный физический смысл постоянной живой силы системы.

Поставленная задача была решена в рамках классической механики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения.
2. Четаев Н. Г. Об устойчивых траекториях динамики. Ученые записки Казан. ун-та, 1931, т. 91, кн. 4 вып. 1.
3. Четаев Н. Г. Об одной задаче Коши. ПММ, 1945, т. 9, вып. 2.
4. Ляпунов А, М. К вопросу об устойчивости движения.
5. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, М.— Л., 1946. стр. 102.