Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ЗАДАЧА КЛЕЙНА *

Н. Г. Четаев
(Москва)

Важнейшим открытием аналитической механики является оптико-механическая аналогия, обнаруженная (открытая) Гамильтоном.

Гамильтон установил одинаковый канонический вид

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

основных уравнений динамики консервативных систем и волновой теории света Гюйгенса.

С оптико-механической аналогией теснейшим образом связаны открытия Гамильтона, Якоби, Пуанкаре, Гельмгольца. Все это хорошо известно.

Оптические теории не застыли на волновой теории Гюйгенса. Последовательно на смену теории Гюйгенса в оптике были созданы теории Френеля, Коши, Максвелла.

Коши, поставивший целью дальнейшее развитие оптико-механической аналогии Гамильтона, нашел эту аналогию не в области динамики систем материальных точек, а в области колебаний упругой среды. Своим открытием Коши увел из аналитической динамики вопросы о дальнейшем развитии аналогии с после-Гюйгенсовыми теориями света.

Пожалуй, Феликс Клейн был первым, кто обратил на это обстоятельство свое внимание. Поэтому задачу дальнейшего развития оптико-механической аналогии в рамках аналитической динамики условимся называть задачей Клейна.

Чтобы решить задачу Клейна, заметим, что во всех после-Гюйгенсовых теориях свет понимается как некоторый колебательный процесс. Поэтому развитие оптико-механической аналогии следует искать в области колебательных движений.

Еще Лагранж установил, что вблизи положения равновесия некоторой механической системы колебания возникают при малых возмущениях начальных значений координат q и импульсов p, тогда, когда положение равновесия устойчиво. И наоборот, если положение равновесия устойчиво, то вблизи него возмущенные движения носят колебательный характер, если нарушающийся, то только за счет вековых членов. Для случая периодических движений теорему Лагранжа обобщили независимо друг от друга Пуанкаре и Ляпунов. Они показали, что если какое-либо периодическое движение консервативной системы устойчиво, то у соответствующих уравнений в вариациях Пуанкаре все решения имеют нуле-

* Работа обнаружена в записях Н. Г. Четаева и датирована 1941 г.

вые характеристические числа Ляпунова. Теорему Пуанкаре и Ляпунова на общий случай устойчивых движений консервативных систем удалось обобщить мне.

Таким образом,если решение задачи Клейна существует, то его следует искать в свойствах устойчивых движений консервативных систем.

1. Одно свойство устойчивых движений консервативных систем. Пусть для простоты имеется голономная система с одной степенью свободы, находящаяся под действием сил, допускающих силовую функцию; пусть q — координата Лагранжа, p — сопряженный ей импульс, а H — функция Гамильтона. Уравнения движения имеют вид

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Уравнения в вариациях Пуанкаре для некоторого ведущего или невозмущенного движения будут

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q}\xi + \frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\eta, \qquad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}\xi - \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p}\eta$$

где ξ, η обозначают вариации соответственно координаты q и импульса p.

Пусть ведущее движение приводимо и устойчиво в смысле Ляпунова. При малых начальных возмущениях ξ_0, η_0 уравнения Пуанкаре будут всегда уравнениями первого приближения. Решения уравнений в вариациях Пуанкаре будут иметь вид

$$\xi = \alpha\xi_0 + \beta\eta_0 \qquad \eta = \gamma\xi_0 + \delta\eta_0 \tag{1.1}$$

Для двух произвольных решений ξ, η и ξ', η' уравнений в вариациях Пуанкаре установил хорошо известный инвариант

$$\xi\eta' - \eta\xi'$$

Согласно инварианту Пуанкаре имеем

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta \\ \xi' & \eta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_0 & \eta_0 \\ \xi_0' & \eta_0' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_0 & \eta_0 \\ \xi_0' & \eta_0' \end{vmatrix}, \text{ или } \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1$$

Другими словами, для каждого момента t преобразования (1.1) представляют унимодулярную группу линейных преобразований. Если ведущее движение устойчиво и приводимо, то согласно основным результатам теории устойчивости Ляпунова уравнения в вариациях Пуанкаре имеют знакоопределенную инвариантную квадратичную форму. Предполагая переменные приведенными, инвариантную квадратичную форму мы будем иметь следующего вида:

$$\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta}$$

Какие соотношения дает инвариантность этой формы на коэффициенты унимодулярного линейного преобразования (1.1)?

Имеем

$$\xi\bar{\xi} + \eta\bar{\eta} = (\alpha\xi_0 + \beta\eta_0)(\bar{\alpha}\bar{\xi}_0 + \bar{\beta}\bar{\eta}_0) + (\gamma\xi_0 + \delta\eta_0)(\bar{\gamma}\bar{\xi}_0 + \bar{\delta}\bar{\eta}_0) =$$

$$= \bar{\alpha}\alpha\xi_0\bar{\xi}_0 + \alpha\bar{\beta}\xi_0\bar{\eta}_0 + \beta\bar{\alpha}\eta_0\bar{\xi}_0 + \beta\bar{\beta}\eta_0\bar{\eta}_0 + \gamma\bar{\gamma}\xi_0\bar{\xi}_0 + \gamma\bar{\delta}\bar{\xi}_0\bar{\eta}_0 + \delta\bar{\gamma}\eta_0\bar{\xi}_0' + \delta\bar{\delta}\eta_0\bar{\eta}_0 =$$

$$= (\alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma})\xi_0\bar{\xi}_0 + (\alpha\bar{\beta} + \bar{\gamma}\delta)\xi_0\bar{\eta}_0 + (\beta\bar{\alpha} + \delta\bar{\gamma})\eta_0\bar{\xi}_0 + (\beta\bar{\beta} + \delta\bar{\delta})\eta_0\bar{\eta}_0 = \xi_0\bar{\xi}_0 + \eta_0\bar{\eta}_0$$

Так как это соотношение должно иметь место для произвольных начальных значений ξ_0, η_0, то должны иметь место следующие соотношения:

$$\alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma} = 1, \qquad \alpha\bar{\beta} + \gamma\bar{\delta} = 0$$
$$\beta\bar{\alpha} + \delta\bar{\gamma} = 0, \qquad \beta\bar{\beta} + \delta\bar{\delta} = 1$$

Из первой колонки полученных соотношений получаем

$$\bar{\alpha} = \begin{vmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & \delta \end{vmatrix} = \delta, \qquad \bar{\gamma} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 0 \end{vmatrix} = -\beta$$

а из второй колонки

$$\bar{\beta} = \begin{vmatrix} 0 & \gamma \\ 1 & \delta \end{vmatrix} = -\gamma, \qquad \bar{\delta} = \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 1 \end{vmatrix} = \alpha$$

Таким образом, матрица унимодулярных преобразований (1.1) в случае устойчивости ведущего движения и в приведенных переменных ξ, η обладает следующим свойством

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\delta} & -\bar{\gamma} \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

2. Представления полученной группы преобразований. Выражение аналогии между явлениями заключается в совпадении группы преобразований одного явления с группой преобразований другого явления. Если обе группы оказываются одинаковыми, то между двумя явлениями существует аналогия.

Существо открытой Гамильтоном аналогии лежит в том, что группа преобразований консервативной системы и группа распространения света по волновой теории Гюйгенса являются группами касательных или канонических преобразований. Что группа преобразований динамики консервативных систем есть группа касательных преобразований, установлено еще Гамильтоном в основном свойстве функции действия V

$$\delta V = \sum p\delta q - \sum p^\circ \delta q^\circ$$

утверждающем, что значения q, p и q°, p° связаны между собой формулами касательного преобразования

$$p = \frac{\partial V}{\partial q}, \qquad -p^\circ = \frac{\partial V}{\partial q^\circ}$$

Следовательно, для нахождения явлений, аналогичных возмущенным движениям канонических систем вблизи устойчивого ведущего движения, необходимо рассмотреть представления полученной группы унимодулярных линейных преобразований (1.1) со свойством (1.2).

Хорошо выяснено, что группа унимодулярных линейных преобразований (1.1) имеет представление в собственной группе Лоренца. Необходимо выяснить представление свойства (1.2).

Рассмотрим пространство ξ, η, метрические свойства которого определяются инвариантом Пуанкаре

$$\xi\eta' - \eta\xi'$$

Мы получим так называемое спинорное пространство с кососимметричным фундаментальным тензором

$$\{g_{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

если вариации ξ, η будем понимать как контравариантные составляющие вектора ξ^1, ξ^2. Ковариантные составляющие определятся обычными формулами

$$\xi_\alpha = \sum g_{\alpha\beta}\xi^\beta$$

Отсюда

$$\xi_1 = \xi^2, \qquad \xi_2 = -\xi^1$$

Если преобразованиями контравариантных составляющих являются преобразования (1.1), то для ковариантных составляющих ξ_1, ξ_2 будем иметь такие

$$\xi_1 = \delta\xi_{01} - \gamma\xi_{02}, \qquad \xi_2 = -\beta\xi_{01} + \alpha\xi_{02}$$

Откуда сопряженные составляющие $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$ будут преобразовываться согласно формулам

$$\bar{\xi}_1 = \bar{\delta}\bar{\xi}_{01} - \bar{\gamma}\bar{\xi}_{02}, \qquad \bar{\xi}_2 = -\bar{\beta}\bar{\xi}_{01} + \bar{\alpha}\bar{\xi}_{02}$$

Если ведущее движение устойчиво, если имеют место соотношения (1.2), то отсюда непосредственно получаем формулы преобразования

$$\bar{\xi}_1 = \alpha\bar{\xi}_{01} + \beta\bar{\xi}_{02}, \qquad \bar{\xi}_2 = \gamma\bar{\xi}_{01} + \delta\bar{\xi}_{02}$$

другими словами, составляющие $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$ преобразуются по формулам (1.1) преобразования контравариантных составляющих вектора спинорного пространства.

Таким образом, если свойство (1.2) имеет место для любого вектора (ξ), на составляющие $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$ можно смотреть, как на контравариантные составляющие η^1, η^2 некоторого, отвечающего вектора (η). Это обстоятельство аналитически мы будем записывать следующими соотношениями:

$$S\bar{\xi}_\alpha = \eta^\alpha, \qquad S\eta^\alpha = \bar{\xi}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2) \tag{2.1}$$

Представления преобразования S хорошо изучены Ван дер Верденом в сочинении «Метод теории групп в квантовой механике». Он установил, что преобразование S дополняет представление унимодулярной группы линейных преобразований (1.1) в собственной группе Лоренца преобразованием отражения. Другими словами, группа унимодулярных линейных преобразований (1.1) со свойством (1.2) имеет представление в полной группе Лоренца.

Для полноты приведу метод такого представления. Рассмотрим спинтензор второго порядка $\|c_{\mu\dot{\nu}}\|$, компонента $c_{\mu\dot{\nu}}$ которого преобразуется как произведение $\xi_\mu\bar{\xi}_\nu$. Такой тензор обладает следующим инвариантом

$$C = \begin{vmatrix} c_{1\dot{1}} & c_{1\dot{2}} \\ c_{2\dot{1}} & c_{2\dot{1}} \end{vmatrix} = c_{1\dot{1}}c_{2\dot{2}} - c_{1\dot{2}}c_{2\dot{1}} = \frac{1}{2}\left(c_{1\dot{1}}c^{1\dot{2}} + c_{2\dot{2}}c^{2\dot{2}} + c_{1\dot{2}}c^{1\dot{2}} + c_{2\dot{1}}c^{2\dot{1}}\right) = \frac{1}{2}\sum c_{\mu\dot{\nu}}c^{\mu\dot{\nu}}$$

Рассмотрим тензоры $\|c_{\mu\dot{\nu}}\|$, для которых инвариантная квадратичная форма

$$\sum c_{\mu\dot{\nu}}\xi^\mu\bar{\xi}^\nu$$

принимает только вещественные значения. При этом $c_{1\dot{1}}$, $c_{2\dot{2}}$ должны быть вещественными, а $c_{1\dot{2}}$ и $c_{2\dot{1}}$ комплексно-сопряженными. Если теперь вместо $c_{\mu\dot{\nu}}$ ввести новые вещественные переменные x_0, x_1, x_2, x_3 согласно соотношениям

$$c_{1\dot{1}} = x_3 + x_0, \qquad c_{1\dot{2}} = x_1 + ix_2$$
$$c_{2\dot{1}} = x_1 - ix_2, \qquad c_{2\dot{2}} = -x_3 + x_0 \tag{2.2}$$

то инвариант C в новых переменных выразится следующим образом:

$$C = \begin{vmatrix} x_3 + x_0 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 + x_0 \end{vmatrix} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

Это обстоятельство показывает, что при преобразовании (1.1) вещественные переменные x_k будут преобразовываться, оставляя инвариантным выражение $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, т. е. переменные x_k будут испытывать вещественное собственное преобразование Лоренца.

Применим теперь преобразование S, определенное формулами (2.1) к тензору $\|c_{\mu\dot{\nu}}\|$

$$S\,\|c_{\mu\dot{\nu}}\| = \|c'^{\mu\dot{\nu}}\|$$

или подробнее

$$Sc_{1\dot{1}} = c'^{1\dot{1}} = c_{2\dot{2}}', \qquad Sc_{1\dot{2}} = c'^{2\dot{1}} = -c_{1\dot{2}}'$$
$$Sc_{2\dot{1}} = c'^{2\dot{1}} = -c_{1\dot{2}}' \qquad Sc_{2\dot{2}} = c'^{2\dot{2}} = c_{1\dot{1}}'$$

а это согласно формул (2.2) непосредственно дает отражение

$$x_0' = x_0, \quad x_1' = -x_1, \quad x_2' = -x_2, \quad x_3' = -x_3$$

Следовательно, полная группа преобразований Лоренца является представлением группы унимодулярных линейных преобразований (1.1) со свойством (1.2).

Полная группа Лоренца является основной для теории света Коши, Максвелла, появившихся после теории Гюйгенса, поэтому на полученный результат можно смотреть, как на решение задачи Клейна.

3. **Другое доказательство.** Для основного результата разумно потребовать еще одно доказательство.

В первом доказательстве было использовано свойство (1.2) приведенных переменных для устойчивых возмущенных движений. Пусть теперь ξ^1, ξ^2 представляют общие вариации координаты и импульса. Согласно инварианту Пуанкаре составляющие ξ^α преобразуются по группе унимодулярных линейных преобразований

$$\xi^1 = \alpha\xi_0^1 + \beta\xi_0^2 \qquad \xi^2 = \gamma\xi_0^1 + \delta\xi_0^2 \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1) \tag{3.1}$$

Пусть ведущее движение устойчиво, а отвечающие дифференциальные уравнения в вариациях Пуанкаре приводимы. Тогда согласно результатам Ляпунова существует знакоопределенная в смысле Ляпунова квадратичная, вещественная инвариантная форма — функция Ляпунова. В спинорном пространстве группы унимодулярных линейных преобразований (3.1) эта функция Ляпунова будет иметь вид квадратичной формы Эрмита

$$\sum c_{\mu\dot{\nu}}\xi^\mu\bar{\xi}^\nu \qquad (c_{\mu\dot{\nu}} = \overline{c_{\nu\dot{\mu}}})$$

где $|c_{\mu\dot{\nu}}|$ представляют ограниченные функции времени. Условие знакоопределенности формы Эрмита хорошо известно

$$C = \begin{vmatrix} c_{1\dot{1}} & c_{1\dot{2}} \\ c_{2\dot{1}} & c_{2\dot{2}} \end{vmatrix} > 0 \qquad (c_{1\dot{1}} \neq 0) \tag{3.2}$$

Действительно, пусть преобразования

$$\varphi^\alpha = \sum A^\alpha_\beta \xi^\beta$$

являются преобразованием к каноническим приведенным переменным φ^α, в которых уравнения в вариациях Пуанкаре имеют постоянные коэффициенты. Согласно определению приводимых систем (Ляпунов. Общая задача, стр. 43) коэффициенты A^α_β удовлетворяют следующим условиям: они суть непрерывные и ограниченные функции времени t, их первые производные суть функции такого же характера и величина

$$\frac{1}{\| A^\alpha_\beta \|}$$

есть ограниченная функция t. Отсюда очевидная в канонических приведенных переменных φ^α функция Ляпунова имеет вид

$$\sum \varphi^\alpha \bar{\varphi}^\alpha = \sum A^\alpha_\mu \bar{A}^\alpha_\nu \xi^\mu \bar{\xi}^\nu$$

Так как для устойчивых возмущенных движений, определенных каноническими уравнениями в вариациях, функция Ляпунова является инвариантом (пара чисто мнимых характеристичных корней), то

$$c_{\mu\dot{\nu}} = \sum_a A^\alpha_\mu \bar{A}^\alpha_\nu$$

являются компонентами спинтензора второго порядка. Эрмитовость квадратичной формы доказывается непосредственно из соотношений

$$c_{\mu\dot{\nu}} = \sum A^\alpha_\mu \overline{A^\alpha_\nu} = \overline{\sum \overline{A^\alpha_\mu} A^\alpha_\nu} = \overline{c_{\nu\dot{\mu}}}$$

Выражения $c_{\mu\dot{\nu}}$ являются ограниченными, а $c_{\mu\dot{\mu}}$ — положительными.

Мы видели, что дискриминант формы Эрмита C является инвариантом группы унимодулярных линейных преобразований (3.1). Условие знакоопределенности (3.2) в переменных x_k имеет вид

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0$$

Дальнейшее просто. Рассмотрим поэтому инвариант

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1 > 0$$

В пространстве (эвклидовом) $x_0\ x_1\ x_2\ x_3$ это уравнение определяет двуполый гиперболоид. Соображениями, какие развил Пуанкаре в статье «Об основных гипотезах геометрии», геометрию двуполого гиперболоида возможно отобразить на вещественное трехмерное пространство Лобачевского. Определенным значениям переменных x_k отвечает одна точка верхней $x_0 > 0$ полы двуполого гиперболоида, а стало быть, и одна точка вещественной части пространства Лобачевского. Это отображение возможно также осуществить по Кели, Картану, а также другими путями.

Совокупность преобразований точек вещественного пространства Лобачевского представляет, как известно, полную группу Лоренца — основную группу преобразований математической теории света Коши и электромагнитной теории света Максвелла. Этим доказывается, что группа унимодулярных линейных преобразований (3.1) для случая устойчивого ведущего движения (если уравнения в вариациях являются при этом приводимыми) имеет своим представлением полную группу Лоренца.

Совокупность линейных преобразований переменных x_k в вещественном пространстве Лобачевского состоит из движений пространства в самом себе и из отражений. Другими словами, группа унимодулярных линейных преобразований (3.1), отвечающая устойчивому ведущему движению, имеет представление в собственной группе Лоренца, дополненной отражением. Группа собственных преобразований Лоренца с преобразованием отражения представляет полную группу Лоренца. Теорема доказана.

Замечание. Предложенное доказательство позволяет освободиться от гипотезы приводимости уравнений в вариациях Пуанкаре, если наперед потребовать существование знакоопределенного (в смысле Ляпунова) инварианта

$$\sum c_{\mu\dot{\nu}}\xi^{\mu}\overline{\xi^{\nu}}$$

При этом устойчивость ведущего движения будет непосредственно следовать из существования такого инварианта на основании общей теоремы Ляпунова об устойчивости движений (Общая задача, стр. 61).

4. Третье доказательство. Можно привести еще одно доказательство без использования результатов спинорного анализа и без привлечения геометрии Лобачевского.

Рассмотрим уравнения в вариациях Пуанкаре для ведущего движения

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q}\xi+\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\eta,\qquad \frac{d\eta}{dt}=-\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\xi-\frac{\partial^2 H}{\partial q\partial p}\eta$$

Если возмущенное движение устойчиво и уравнения в вариациях приводимы в смысле Ляпунова, то характеристическое уравнение приведенной системы будет иметь пару чисто мнимых корней, а следовательно, знакоопределенная функция Ляпунова V для уравнений в вариациях Пуанкаре будет квадратичной, вещественной формой, полная производная по времени от которой есть нуль.

Пусть функция Ляпунова выражена эрмитовой формой

$$V=\varphi_1\xi\bar{\xi}+\psi_1\xi\bar{\eta}+\psi_2\bar{\xi}\eta+\varphi_2\eta\bar{\eta}$$

удовлетворяющей условию знакоопределенности ($\varphi_1\neq 0$) и

$$C=\begin{vmatrix}\varphi_1 & \psi_1\\ \psi_2 & \varphi_2\end{vmatrix}>0 \tag{4.1}$$

Первая полная производная по времени от функции Ляпунова V тождественно равна нулю. Это дает

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&=\varphi_1'\xi\bar{\xi}+\varphi_1\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q}\xi+\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\eta\right)\bar{\xi}+\varphi_1\xi\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q}\bar{\xi}+\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\bar{\eta}\right)+\\&+\psi_1'\xi\bar{\eta}+\psi_1\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q}\xi+\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\eta\right)\bar{\eta}+\psi_1\xi\left(-\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}\bar{\xi}-\frac{\partial^2 H}{\partial q\partial p}\bar{\eta}\right)+\\&+\psi_2'\bar{\xi}\eta+\psi_2\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q}\bar{\xi}+\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\bar{\eta}\right)\eta+\psi_2\bar{\xi}\left(-\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}\xi-\frac{\partial^2 H}{\partial q\partial p}\eta\right)+\\&+\varphi_2'\eta\bar{\eta}+\varphi_2\left(-\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}\xi-\frac{\partial^2 H}{\partial q\partial p}\eta\right)\bar{\eta}+\varphi_2\eta\left(-\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}\bar{\xi}-\frac{\partial^2 H}{\partial q\partial p}\bar{\eta}\right)\equiv 0\end{aligned}$$

Сравнение коэффициентов при $\xi\bar{\xi}$, $\xi\bar{\eta}$, $\bar{\xi}\eta$, $\eta\bar{\eta}$ дает следующую систему линейных дифференциальных уравнений

$$\varphi_1'+2\frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q}\varphi_1-\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}(\psi_1+\psi_2)=0,\qquad \psi_1'+\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\varphi_1+\frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q}\psi_1-\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}\varphi_2=0$$

$$\varphi_2'-2\frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q}\varphi_2+\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(\psi_1+\psi_2)=0,\qquad \psi_2'+\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\varphi_1-\frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q}\psi_2-\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}\varphi_2=0$$

Действительно, если бы правые части этих уравнений были не нули, то произвольными начальными значениями ξ_0, η_0 можно было бы всегда распорядиться так, чтобы dV/dt в начальный момент (который может быть выбран по желанию) была бы отлична от нуля, что невозможно по условию.

Легко видеть непосредственным вычислением, что выражение

$$C = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 \\ \psi_2 & \varphi_2 \end{vmatrix} = \varphi_1\varphi_2 - \psi_1\psi_2$$

является интегралом. Действительно, согласно дифференциальным уравнениям для функций φ_α, ψ_α

$$\frac{dC}{dt} = \varphi_1{}'\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2{}' - \psi_1{}'\psi_2 - \psi_1\psi_2{}' =$$

$$= \left[-2\frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q}\varphi_1 + \frac{\partial^2 H}{\partial q^2}(\psi_1 + \psi_2)\right]\varphi_2 + \left[2\frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q}\varphi_2 - \frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(\psi_1 + \psi_2)\right]\varphi_1 +$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\varphi_1 + \frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q}\psi_1 - \frac{\partial^2 H}{\partial q^2}\varphi_2\right]\psi_2 + \left[\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\varphi_1 - \frac{\partial^2 H}{\partial p\partial q}\psi_2 - \frac{\partial^2 H}{\partial q^2}\varphi_2\right]\psi_1 \equiv 0$$

Дальнейшее, как в предшествующем доказательстве.

5. **Четвертое доказательство.** Для одного примитивного случая решение возможно найти в замкнутой форме. Пусть

$$2T = \sum a_{ij}p_ip_j, \qquad U = U(q_1, \ldots, q_k)$$

где T и U суть живая сила и силовая функция для некоторой механической системы с k степенями свободы, для которой $q_1, \ldots, q_k$ — координаты, а $p_1, \ldots, p_k$ — импульсы.

Пусть $V(t, q_1, \ldots, q_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ — полный интеграл Якоби уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$$

где $H = T - U$ есть функция Гамильтона: a_{ij} не зависит явно от t. Отсюда

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -h$$

где h — постоянная живой силы. Рассмотрим функцию $\varphi(V)$. Имеем

$$\varphi_{tt} = \varphi'' h^2$$

и

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(a_{ij}\frac{\partial V}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\varphi' a_{ij}\frac{\partial V}{\partial q_j}\right) = \varphi'' a_{ij}\frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{\partial V}{\partial q_j} + \varphi'\frac{\partial}{\partial q_i}\left(a_{ij}\frac{\partial V}{\partial q_j}\right)$$

Отсюда

$$L[\varphi] = \sum\frac{\partial}{\partial q_i}\left(a_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial q_j}\right) = \varphi''\sum a_{ij}p_ip_j + \varphi' L[V]$$

Но

$$\sum a_{ij}p_ip_j = 2(U + h)$$

При $h \neq 0$ имеем

$$L[\varphi] = \varphi_{tt}\frac{2(U+h)}{h^2} + \varphi' L[V]$$

Теперь допустим, что ведущее движение устойчиво при фиксированных $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Имеем

$$\eta_j = \delta p_j = \sum\frac{\partial^2 V}{\partial q_j\partial q_i}\xi_i$$

Значит, уравнения в вариациях Пуанкаре дают

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} \xi_j + \sum \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_s} \eta_s = \sum \frac{\partial a_{is}}{\partial q_j} p_s \xi_j + \sum a_{is} \eta_s =$$

$$= \sum \frac{\partial a_{is}}{\partial q_j} \frac{\partial V}{\partial q_s} \xi_j + \sum a_{is} \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q} \xi_j = \sum \frac{\partial}{\partial q_j} \left(a_{is} \frac{\partial V}{\partial q_s} \right) \xi_j$$

Для приводимой системы (для простоты: это справедливо для правильной системы) характеристичное число выражения

$$\exp \int \sum \frac{\partial}{\partial q_r} \left(a_{rj} \frac{\partial V}{\partial q_j} \right) dt = \exp \int L[V] \, dt$$

для устойчивых движений должно быть нулем. Для примитивного случая это условие устойчивости будет

$$L[V] = 0$$

(В общем случае это условие есть достаточное, чтобы удовлетворялось одно условие устойчивости.) Согласно последнему соотношению имеем

$$\rho \varphi_{tt} = L[\varphi] \quad \left(\rho = \frac{2(U + h)}{h^2} \right)$$

Это уравнение — гиперболического типа, так как $2T = \sum a_{ij} p_i p_j$ представляет определенно положительную квадратичную форму.

В общем случае

$$\int L[V] \, dt \text{ — ограниченная функция}$$

6. Развитие оптико-механической аналогии. Чтобы показать, что найденный результат представляет развитие оптико-механической аналогии, достаточно заметить, что уравнения в вариациях Пуанкаре играли лишь роль удобства при применении общих результатов теории устойчивости движений Ляпунова. Можно идти непосредственно из основных положений оптико-механической аналогии Гамильтона.

Действительно, функция действия Гамильтона V удовлетворяет основному соотношению касательных преобразований между значениями координаты q и импульса p для момента t и для начального момента t_0

$$\delta V = p \delta q - p^\circ \delta q^\circ$$

Внешняя производная или билинейный ковариант этого выражения

$$[\delta p, \delta q] = [\delta p^\circ, \delta q^\circ] \tag{5.1}$$

представляет собою ничто иное, как инвариант Пуанкаре для уравнений в вариациях. Следовательно, если теперь потребовать устойчивость отклонений δq, δp при малых начальных отклонениях координаты δq^0 и импульса δp^0, то именно билинейный ковариант основного соотношения оптико-механической аналогии Гамильтона (5.1) дает представление получающихся при этом преобразований δp, δq в основной группе после-Гюйгенсовых теорий света — в полной группе Лоренца.

Существенное дополнение к результатам Гамильтона было дано Якоби в его известной теореме о свойствах полного интеграла $V(t, q, \alpha)$ дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, q, \frac{\partial V}{\partial q}\right) = 0$$

Якоби установил соотношения

$$p = \frac{\partial V}{\partial q}, \qquad -\beta = \frac{\partial V}{\partial \alpha}$$

где α, β — постоянные. Согласно последним соотношениям имеем

$$\delta V = p\delta q - \beta\delta\alpha$$

или, если от этого выражения взять билинейный ковариант,

$$[\delta p, \delta q] = [\delta\beta, \delta\alpha]$$

Этот общий инвариант динамики позволяет установить найденные результаты в зависимости от малых отклонений постоянных α, β.

Если имеется механическая система с k степенями свободы и при этом все переменные полностью разделяются, то доказанное развитие оптико-механической аналогии распространяется на такую систему непосредственно в виде k-кратного представления. Общий случай представляет самостоятельный интерес для аналитической динамики.

6. Задачи. В связи с решением задачи Клейна возникает ряд интересных задач, из которых некоторые являются достаточно давно разрешенными.

По-видимому, Лагранж первый в «Аналитической механике» рассмотрел свойства механических систем, допускающих инвариантность связей при возможных преобразованиях элементарной группы поступательных и вращательных движений твердого тела. Общее преобразование этой группы рассмотрел А. П. Котельников. Для голономных связей группу возможных перемещений, имеющих связи инвариантами, в самом общем виде рассмотрел Пуанкаре.

Второй вопрос об общих свойствах механических систем, имеющих некоторое преобразование, оставляющее инвариантными связи и работу или силовую функцию или полную энергию, также рассмотрены. Лагранж рассмотрел элементарные преобразования группы движений твердого тела, оставляющие инвариантными связи и работу заданных сил. Мне удалось рассмотреть преобразования общей группы возможных перемещений, оставляющие инвариантом функцию Лагранжа.

Группа действительных движений также изучалась. Лагранж установил свойства механических систем, действительные перемещения которых находятся среди группы возможных перемещений. Гамильтон установил, что общие преобразования Лагранжевых координат канонической системы q_s и сопряженных импульсов p_s представляют группу касательных преобразований. Общая группа касательных преобразований достаточно хорошо изучена. В данной работе была установлена группа возмущенных движений устойчивого, ведущего движения канонической системы.

Другие естественные задачи динамики, связанные с группой возможных перемещений, с группой действительных движений, с группами, оставляющими инвариантами основные механические функции, задачи, связанные с представлениями этих групп, еще ждут своего разрешения.