Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ГРУБЫХ СИСТЕМ *

Н. Г. Четаев
(Москва)

Грубые системы — это те из нелинейных, для которых вопросы устойчивости корректно разрешаются довольно простыми приближенными приемами. Наибольший интерес привлекают системы, для которых задача об устойчивости движения сводится к рассмотрению линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Достаточно общим для грубых систем является метод, который предложен мною в книге [1], стр. 194, если учесть, что функции f_{sr} были предположены лишь ограниченными; они, следовательно, могут зависеть как от t, так и от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

в предположении, что все коэффициенты p_{sr} имеют вид

$$p_{sr} = c_{sr} + \varepsilon f_{sr}$$

где ε — некоторый вещественный параметр, c_{sr} — вещественные постоянные, а f_{sr} — ограниченные вещественные функции переменных t и, может быть, $x_1, \ldots, x_n$ в области $t \geqslant t_0$ и $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant A$.

Заданные уравнения (1) можно сопоставить с уравнениями с постоянными коэффициентами c_{sr}

$$\frac{dx_s}{dt} = c_{s1} x_1 + \ldots + c_{sn} x_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

О корнях λ_s характеристического уравнения последней системы

$$\| c_{sr} - \delta_{sr} \lambda \| = 0$$

сделаем допущение, что при любых целых неотрицательных числах $m_1, \ldots m_n$, имеющих в сумме 2, выражение $m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n$ не уничтожается. В этом предположении в силу известной теоремы Ляпунова уравнение в частных производных

$$\sum_s \frac{\partial V}{\partial x_s} (c_{s1} x_1 + \ldots + c_{sn} x_n) = -(x_1^2 + \ldots + x_n^2) \tag{3}$$

однозначно определяет квадратичную форму с постоянными коэффициентами $a_{sr} = a_{rs}$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{s,r} a_{sr} x_s x_r$$

* Работа опубликована малым тиражом в 1953 г.

При численно достаточно малом ε и достаточно малом положительном μ, меньшем единицы, квадратичная форма

$$-\frac{dV}{dt}-\mu(x_1^2+\ldots+x_n^2)=$$

$$=(1-\mu)(x_1^2+\ldots+x_n^2)-\varepsilon\sum_{s,r}\frac{\partial V}{\partial x_s}f_{sr}x_r=\sum_{s,r}h_{sr}x_sx_r \qquad (h_{sr}=h_{rs})$$

в которой полная производная по времени t берется в силу заданных уравнений (1), очевидно будет положительной для произвольных значений переменных при достаточно малом A.

При этом асимптотическая устойчивость или неустойчивость невозмущенного движения ($x_1=0,\ldots,x_n=0$) уравнений (2) с постоянными коэффициентами c_{sr} отвечают таковым заданной системы (1). Величины ε и A, для которых такое соответствие безусловно существует, определяются в согласии с теоремой Сильвестра n неравенствами

$$\begin{vmatrix} h_{11},\ldots,h_{1r} \\ h_{r1},\ldots,h_{rr}\end{vmatrix}>0 \qquad (r=1,\ldots,n) \tag{4}$$

при достаточно малом μ.

Определенные последними неравенствами (4) пределы для A и ε, а тем самым и пределы для функций εf_{sr} могут, разумеется, уточняться, если в уравнении (3) рассматривать в правой части вместо выражения — $-(x_1^2+\ldots+x_n^2)$ другую определенно-отрицательную квадратичную форму U с вещественными коэффициентами.

2. Можно дать оценку пределов наибольших и наименьших отклонений возмущенных переменных.

С этой целью рассмотрим экстремальные значения производной

$$V'=-(x_1^2+\ldots+x_n^2)+\varepsilon\sum_{s,r}\frac{\partial V}{\partial x_s}f_{sr}x_r=\frac{1}{2}\sum_{s,r}b_{sr}x_sx_r$$

на поверхности $V=c$. Согласно методу Лагранжа, для экстремума имеем уравнение с множителем λ

$$\frac{\partial V'}{\partial x_s}=\lambda\frac{\partial V}{\partial x_s} \tag{5}$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\frac{db_{\alpha\beta}}{\partial x_s}x_\alpha x_\beta+\sum_\alpha b_{s\alpha}x_\alpha=\lambda\sum a_{s\alpha}x_\alpha$$

Симметризуем эти уравнения

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial x_s}x_\beta+\frac{\partial b_{\beta\alpha}}{\partial x_s}x_\alpha\right)x_\alpha+\sum b_{s\alpha}x_\alpha=\lambda\sum a_{s\alpha}x_\alpha$$

и, следовательно, λ должно удовлетворять уравнению

$$\left\|\frac{1}{4}\sum_\beta\left(\frac{\partial b_{r\beta}}{\partial x_s}x_\beta+\frac{\partial b_{\beta r}}{\partial x_s}x_\alpha\right)+b_{sr}-\lambda a_{sr}\right\|=0$$

В области $x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant A$ и при t на интервале $[t_0, t]$ пусть λ_1 наименьший, а λ' наибольший корень этого уравнения.

Для случая грубой устойчивости, когда функция V определенно-положительна, после умножения уравнений (5) на переменные x_s и суммирования, имеем

$$\sum \frac{\partial V'}{\partial x_s} x_s = 2\lambda V, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}\sum_{s,\alpha,\beta} \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial x_s} x_s x_\alpha x_\beta + 2V' = 2\lambda V$$

На поверхности $V=c$ при достаточно малом A функция

$$\varepsilon_1 2V \leqslant -\frac{1}{2}\sum_{s,\alpha,\beta} \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial x_s} x_s x_\alpha x_\beta \leqslant \varepsilon' 2V$$

где ε_1 и ε' — достаточно малые числа, и, следовательно,

$$(\lambda_1+\varepsilon_1)V \leqslant V' \leqslant (\lambda'+\varepsilon')V$$

Отсюда

$$V_0 e^{(\lambda_1+\varepsilon_1)t} \leqslant V \leqslant V_0 e^{(\lambda'+\varepsilon')t}$$

Если начальные возмущения $x_{10}, \ldots, x_{n0}$ лежали на сфере $x_{10}^2+\ldots+x_{n0}^2=c$, то

$$\varkappa_1 c \leqslant V_0 \leqslant \varkappa_n c$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_n$ обозначают соответственно наибольший и наименьший корни уравнения $\|a_{sr}-\delta_{sr}\varkappa\|=0$.

Для случая грубой устойчивости, когда V — определенно-положительна, корни эти положительны.

Точки $(x_1,\ldots,x_n)$, в которых функция Ляпунова имеет значение V, находятся в области

$$x_1^2+\ldots+x_n^2 \leqslant \frac{V}{\varkappa_1}$$

Отсюда квадрат радиуса сферы, в которую будет входить точка в возмущенном движении при начальном условии $x_{10}^2+\ldots+x_{n0}^2=c$, будет удовлетворять неравенству

$$x_1^2+\ldots+x_n^2 \leqslant c\frac{\varkappa_n}{\varkappa_1} e^{(\lambda'+\varepsilon')t}$$

Разумеется, что даваемые последними неравенствами пределы отклонений возмущенных переменных x_s могут уточняться, если в уравнении (3) рассматривать в правой части вместо выражения $x_1^2+\ldots x_n^2$ другую определенно-положительную квадратичную форму U с вещественными постоянными коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения, Гостехиздат, М.—Л. 1946.
2. Четаев Н. Г. О некоторых вопросах, относящихся к задаче об устойчивости неустановившихся движений. В этом выпуске журнала ПММ, стр. 6—19.